**INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU**

romania2019.eu
Romanian Presidency of the Council of the European Union

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**
**ETAPA LOCALĂ, 16.02.2019**
**Clasa a X-a**

**1. (7p)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 15^x + 30^x = 3^x + 6^x + 10^x$.

**2. (7p)** Calculați valoarea expresiei

$$E(x) = \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} \left(x^{-1} + y^{-1}\right) + 2\left(x^{-\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}$$

pentru $x = \left(\sqrt{2}\right)^{8-\sqrt{28}}$, $y = 2^{4+\sqrt{7}}$.

**3.** Se consideră funcția $f:(0,1) \to R$, $f(x) = \frac{1}{\log_x 3 \cdot \log_x 9} + \frac{1}{\log_x 9 \cdot \log_x 27} + ... + \frac{1}{\log_x 3^n \cdot \log_x 3^{n+1}}$, unde $n \in N, n \geq 5$.

**a) (3p)** Demonstrați că funcția $f$ este injectivă, dar nu este surjectivă.

**b) (4p)** Determinați numerele naturale $n \geq 5$, pentru care există soluţii ale inecuației $f(x) \leq \frac{n+1}{n}$ mai mici decât $3^{-\frac{8}{7}}$.

**4.** Se consideră numerele complexe $z_1, z_2, z_3$, care îndeplinesc condițiile $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ și $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

**a) (3p)** Calculați $\left|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 1\right|$.

**b) (4p)** Demonstrați că $z = z_1^{2019} + z_2^{2019} + z_3^{2019}$ este număr real.

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.